www.etude-generale.com — 2BAC PC-SVT
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

# LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

## Généralités sur les suites (Rappel)

Soit $n_0$ un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

### Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

**Définition 1 .**

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est majorée s'il existe un réel* $M$ *tel que :* $(\forall n \in I)\,,\ u_n \leq M$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est minorée s'il existe un réel* $m$ *tel que :* $(\forall n \in I)\,,\ u_n \geq m$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

### Monotonie d'une suite numérique

**Propriété 2 .**

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est croissante si :* $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est décroissante si :* $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est constante si :* $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} = u_n$

**Remarque 3 .**

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est croissante alors :* $(\forall n \in I)\,,\ u_n \geq u_{n_0}$.

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est décroissante alors :* $(\forall n \in I)\,,\ u_n \leq u_{n_0}$.

### Suite arithmétique

**Définition 4 .**
*On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est arithmétique s'il existe un réel* $r$ *(indépendant de* $n$*) tel que :* $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} - u_n = r$. *Le nombre* $r$ *est appelé la raison de la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$.

**Propriété 5 .**
*Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est une suite arithmétique de raison* $r$ *alors pour tout* $(n, p) \in I^2$ :

$$u_n = u_p + (n - p)\, r \qquad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \frac{n - p + 1}{2}\,(u_p + u_n)$$

## Suite géométrique

**Définition 6** .

*On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est géométrique s'il existe un réel* $q$ *(indépendant de* $n$*) tel que :* $(\forall n\in I)\,,\ u_{n+1}=qu_n$*. Le nombre* $q$ *est appelé la raison de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ .

**Propriété 7** .

*Si la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite géométrique de raison* $q\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ *alors pour tout* $(n,p)\in I^2$ :

$$u_n=u_p.q^{n-p}\qquad et\qquad u_p+u_{p+1}+...+u_n=u_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\qquad(n\geq p)$$

**Exercice 8** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+3}\end{cases}$

1. **a)** *Calculer* $u_1$ *et* $u_2$.

   **b)** *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_n>1$.

2. *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

3. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, on pose* $v_n=\dfrac{u_n}{u_n-1}$.

   **a)** *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $q=\dfrac{4}{3}$ *et calculer* $v_0$.

   **b)** *Exprimer* $v_n$ *en fonction de* $n$*, puis en déduire que :* $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_n=\dfrac{3}{3-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

4. *On pose :* $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ *où* $n\in\mathbb{N}$*. Calculer* $S_n$ *en fonction de* $n$.

# Suite convergente - Suite divergente :

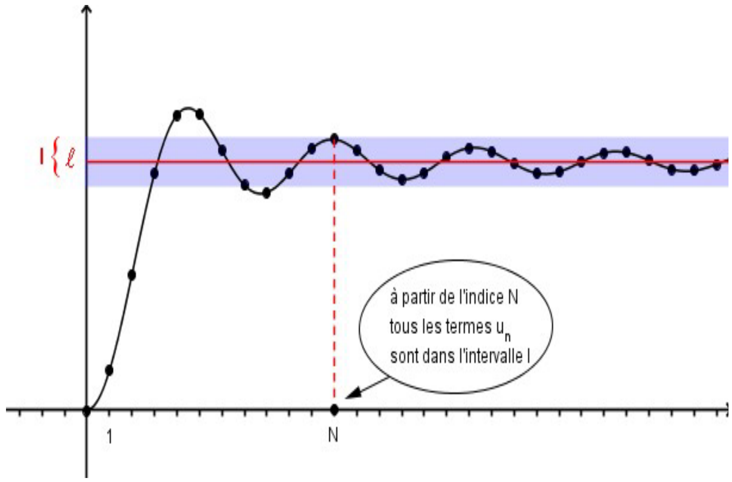
## Limite finie d'une suite

**Définition 9** .

*Étant donné une suite numérique* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $\ell\in\mathbb{R}$*, on dit que* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\ell$*, ou encore converge vers* $\ell$*, si tout intervalle ouvert contré en* $\ell$ *contient tous les termes de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *à partir d'un certain rang. En d'autres termes :*

$$(\forall\epsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\geq N)\quad |u_n-\ell|<\epsilon$$

*Et on écrit :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$ *ou* $\lim u_n = \ell$




**Remarque 10** .

*Une suite est convergente si elle a une limite finie.*

**Propriété 11** .

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*),\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad , \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

**Propriété 12** .

*La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe est unique.*

## Limite infinie d'une suite

**Définition 13** .

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *a pour limite* $+\infty$ *si tout intervalle de type* $]A,+\infty[$ *où* $A>0$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ce qui revient à dire que :*

$$(\forall A > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) \quad u_n \in \,]A,+\infty[$$

*On dit alors que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *diverge vers* $+\infty$ *et on notera :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty.$

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *a pour limite* $-\infty$ *si tout intervalle de type* $]-\infty,-A[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ce qui revient à dire que :*

$$(\forall A > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) \quad u_n \in \,]-\infty,-A[$$

*On dit alors que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *diverge vers* $-\infty$ *et on notera :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty.$

**Remarque 14** .

*On a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (-u_n) = -\infty$ , $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (-u_n) = +\infty.$

*Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie. Par exemple, la suite de terme générale* $(-1)^n$ *prend alternativement les valeurs* $-1$ *et* $1$*. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.*

**Propriété 15** .

*Les suites* $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *et* $(n^p)_{n\geq 0}$ *avec* $p \in \mathbb{N}^*$ *sont divergentes et* $\begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^p = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$ .

# Opérations sur les limites

## Limite d'une somme

| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n)$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I |

## Limite d'un produit

| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n \times v_n)$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I |

## Limite de quotient

| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $\ell > 0$ | $-\infty$ ou $\ell < 0$ | $+\infty$ ou $\ell > 0$ | $-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$ | $\ell' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $0^+$ | $0^+$ | $0^-$ | |
| $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | |

**Exemple 16** .

*Déterminer la limite de la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *dans les cas suivants :*

1. $u_n = n - 2\sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 1}$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

♣ *On a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n - 2\sqrt{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1 - \dfrac{2\sqrt{n}}{n}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$

*et comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 1$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.

♣ *On a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$

*et comme* $\begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 2$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1+\dfrac{1}{n^2} = 1$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = 2$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$.

♣ *On a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

*et comme* $\begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty.$$

♣ *On a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

*et comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ *d'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

# Limite de suites par comparaison (Critères de convergence)

## Convergence et comparaison

**Propriété 17** .

*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites numériques convergentes.*
*Si la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est positive alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \geq 0$.
Si $u_n \leq v_n$ *pour tout entier* $n \geq n_0$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$.

**Propriété 18** .

*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites numériques.*

♣ Si $\begin{cases} (\forall n \geq n_0)\,, \; w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. *Ce résultat est appelé " Théorème des gendarmes "*

♣ Si $\begin{cases} (\forall n \geq n_0), \quad |u_n - \ell| \leq v_n \\ \\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$.

**Conséquences 19** .

*Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite convergente vers* $\ell \in \mathbb{R}$.

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est majorée par* $M$ *alors* $\ell \leq M$.

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est minorée par* $m$ *alors* $\ell \geq M$.

**Exemple 20** .

*Déterminer la limite de* $(u_n)$ *dans chaque cas :*

**1)** $(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2+1}$.

**2)** $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = \dfrac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+2}$

**3)** $u_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + ... + \dfrac{1}{n^2+n} \qquad , (n \in \mathbb{N}^*)$.

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ *et comme* $n^2+1 > 0$ *alors* $\dfrac{-1}{n^2+1} \leq \dfrac{\sin(n)}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1}$$

*et comme* $\begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{-1}{n^2+1} = 0 \\ \\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{-1}{n^2+1} = 0 \end{cases}$ *d'après le théorème des gendarmes donc :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

*alors* $-\sqrt{n} \leq (-1)^n \sqrt{n} \leq \sqrt{n}$ *donc* $2n - \sqrt{n} \leq 2n + (-1)^n \sqrt{n} \leq 2n + \sqrt{n}$ *et puisque* $n+2 > 0$ *d'où*

$$\frac{2n - \sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+2}$$

*c'est-à-dire*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ \frac{2n - \sqrt{n}}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+2}$$

$$\text{et comme} \begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n-\sqrt{n}}{n+2} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{2}{n}} \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n+\sqrt{n}}{n+2} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{2}{n}} \end{cases}$$

*et puisque* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2-\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 2$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 1$

$$\text{d'où} \begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{2}{n}} = 2 \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{2}{n}} = 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire : } \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n-\sqrt{n}}{n+2} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2n+\sqrt{n}}{n+2} = 2,$$

*d'après le théorème des gendarmes donc*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2.$$

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $1 \leq k \leq n$ *on déduit les implications suivantes :*

$$1 \leq k \leq n \Longrightarrow n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Longrightarrow \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

*alors* $1 \leq k \leq n \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \Longrightarrow \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$

*et comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n(1+n)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$ *et*

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n\left(n+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0$ , *d'après le théorème des gendarmes on déduit que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

## Divergence et comparaison

**Propriété 21** .

*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites numériques.*

♣ Si $\begin{cases} (\forall n\geq n_0)\,,\ u_n\geq v_n \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n=+\infty \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=+\infty.$

♣ Si $\begin{cases} (\forall n\geq n_0)\,,\ u_n\leq v_n \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n=-\infty \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=-\infty.$

**Exemple 22** .

*Déterminer la limite suivante :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2+(-1)^n$ :

*On a :* $-1\leq(-1)^n\leq 1$ *alors* $n^2-1\leq n^2+(-1)^n\leq 1+n^2$ *et puisque* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2-1=+\infty$ *donc par comparaison* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2+(-1)^n=+\infty.$

**Exemple 23** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\ u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$

*Soit* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $1\leq k\leq n$ *alors* $1\leq\sqrt{k}\leq\sqrt{n}$ *par suite* $\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 1$ *donc* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}1$ *c'est-à-dire* $\frac{n}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq n$ *d'où*

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\quad \frac{n}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq n$$

*et puisque* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ *donc par comparaison* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=+\infty.$

## Convergence et la monotonie

**Théorème 24** .

■ *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

■ *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

**Remarque 25** .

*Le théorème ci-dessus assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.*

**Exemple 26** .

*On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

*Montrons par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \ \ 0 \leq u_n \leq 2$.

*Pour* $n = 0$, *on a* $u_0 = 0$, *et comme* $0 \leq u_0 \leq 2$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $0 \leq u_n \leq 2$ *et montrons que* $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

*On a* $0 \leq u_n \leq 2$ *alors* $2 \leq 2 + u_n \leq 4$ *donc* $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$ *c'est-à-dire* $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ *et comme* $\begin{cases} 0 \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \end{cases}$ *alors* $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

*D'après le principe de récurrence on déduit* : $(\forall n \in \mathbb{N}), \ 0 \leq u_n \leq 2$.

*Étudions la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2+u_n} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{2+u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{2+u_n} + u_n\right)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \\ &= \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \\ &= \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \end{aligned}$$

*et comme* $0 \leq u_n \leq 2$ *alors* $\begin{cases} 2 - u_n \geq 0 \\ u_n + 1 > 0 \\ \sqrt{2+u_n} + u_n > 0 \end{cases}$ *donc* $\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \geq 0$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n \geq 0$$

*Ainsi la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante majorée par* 2, *donc elle est convergente.*

## Divergence et la monotonie

**Propriété 27** .

- *Tous suite croissante non majorée tend vers* $+\infty$.
- *Toute suite décroissante non minorée tend vers* $-\infty$.

# Les suites particulier

## Suite de la forme : $\mathbf{U}_n = n^r$

**Propriété 28** .

*Soit* $r \in \mathbb{Q}^*$.

♣ *Si* $r > 0$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^r = +\infty$

♣ *Si* $r < 0$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^r = 0$

**Exemple 29** .

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{\frac{5}{6}} = +\infty \ , \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{\frac{2}{3}} = +\infty \quad , \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{\frac{-2}{3}} = 0 \ , \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{\frac{-30}{17}} = 0$$

## Suite de la forme : $U_n = a^n$

**Propriété 30** .

*Soit* $a$ *un nombre réel non nul.*

■ *Si* $a > 1$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

■ *Si* $-1 < a < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a^n = 0$.

■ *Si* $a = 1$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a^n = 1$.

■ *Si* $a \leq -1$ *alors la suite* $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite.*

**Exemple 31** .

♣ *On a* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ *car* $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$. *De même* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n = 0$ *car* $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$.

♣ *On a* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ *car* $\dfrac{3}{2} > 1$. *Par contre* $\left(\left(\dfrac{-3^n}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'a pas de limite quand* $n$ *tend vers* $+\infty$.

## Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

**Propriété 32** .

*Si une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est convergente vers* $\ell$ *et* $f$ *est une fonction continue en* $\ell$ *alors la suite* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *définie par* $v_n = f(u_n)$ *est convergente et sa limite est* $f(\ell)$.

*C'est-à-dire si :* $\begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \\ f \text{ continue en } \ell \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

**Exemple 33** .

*Soit* $(v_n)$ *la suite définie par :* $v_n = \cos\left(\dfrac{\pi n+2}{4n+3}\right)$.

*On pose :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n = \dfrac{\pi n+2}{4n+3}$. *On a donc* $v_n = f(u_n)$ *avec* $f(x) = \cos x$.

*On a :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\pi n+2}{4n+3} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n\left(\pi+\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(4+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\pi+\dfrac{2}{n}}{4+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{\pi}{4}$. *Puisque la fonction* $f$ *est continue en* $\dfrac{\pi}{4}$ *alors :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(u_n) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*En résumé :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

**Propriété 34** .

*Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$, *et* $f$ *une fonction continue sur un intervalle* $I$ *avec* $f(I) \subset I$ *et* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 \in I \\ (\forall n \geq n_0)\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

*Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est converge vers* $\ell \in I$, *alors* $\ell$ *est solution dans* $I$ *de l'équation* $f(x) = x$.

**Exemple 35** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-5}{4} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = (u_n+2)^2 - 2 \end{cases}$

**1)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ -2 < u_n < -1$.

**2)** *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

**3)** *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

**4)** *Calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

♣ *Montrons par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ -2 < u_n < -1$.

*Pour* $n = 0$ *on a* $u_0 = -\dfrac{5}{4}$ *et comme* $-2 < u_0 < -1$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $-2 < u_n < -1$ *et on montre que :* $-2 < u_{n+1} < -1$

On a $-2 < u_n < -1$ alors $0 < u_n+2 < 1$ par suite $0 < (u_n+2)^2 < 1$ $\left(\begin{array}{c}\text{la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ est} \\ \text{strictement croissante} \\ \text{sur } [0,+\infty[\end{array}\right)$

donc $-2 < (u_n+2)^2 - 2 < -1$ c'est-à-dire $-2 < u_{n+1} < -1$

donc d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ -2 < u_n < -1.$

♣ *Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante*

*Soit $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n+2)^2 - 2 - u_n \\ &= (u_n+2)^2 - (u_n+2) \\ &= (u_n+2)(u_n+1) \end{aligned}$$

*et comme* $-2 < u_n < -1$ *alors* $\begin{cases} u_n + 1 < 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$ *alors* $(u_n+2)(u_n+1) < 0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} - u_n < 0$. *D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

♣ *Déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

*On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $-2$, donc elle est convergente.*

♣ *Calculons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ :

*La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $u_n \leq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,$ $u_n \leq \dfrac{-5}{4}$.

*On considère la fonction $f$ définie sur* $\left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$ *par :* $f(x) = (x+2)^2 - 2$.

*La fonction $f$ est continue sur* $\left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$ *(car la restriction d'une fonction continue),* *de plus* $f\left(\left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]\right) \subset \left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$ *on a* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 \in \left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$ *et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente sa limite $\ell$ vérifie* $-2 \leq \ell \leq \dfrac{-5}{4}$. *Donc la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans* $\left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$.

*Soit* $x \in \left[-2, \dfrac{-5}{4}\right]$, *on a*

$$f(x) = x \iff (x+2)^2 - 2 = x \iff x^2 + 3x + 2 = 0 \iff x = -1 \quad \text{ou } x = -2$$

*donc* $\ell = -1$ *ou* $\ell = -2$ *et comme* $-2 \leq \ell \leq \dfrac{-5}{4}$ *alors* $\ell = -2$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -2$.

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**

**www.etude – generale.com**